

5.8. Linia ugięcia belki

W wielu zagadnieniach ocena bezpieczeństwa według wzoru (5.19) musi być uzupełniona określeniem odkształceń (przemieszczeń) belki. Ich wartość bowiem może w równym stopniu co i bezpieczeństwo decydować o przydatności konstrukcji.

Wyznaczenie przemieszczeń rozpoczniemy od określenia postaci odkształconej osi $AB'C'$ belki zginanej w płaszczyźnie rysunku (rys. 5.48). Oś ta, jak wiemy, pokrywa się z warstwą obojętną, wobec czego jej krzywizna $1/\rho$ według wzoru (5.16)

$$1/\rho = M_g(x)/EJ_y,$$

jest związana z lokalną wartością $M_g(x)$ momentu gnącego. Obierając jako oś odciętych nieodkształconą oś belki, widzimy, że postać odkształconej osi, tzw. *linia ugięcia*, będzie znana, jeśli wyznaczymy rzędne $w(x)$ tej osi. Z geometrii różniczkowej wiemy, że krzywizna $1/\rho$ linii $w(x)$ wyraża się wzorem

$$1/\rho = w''/(1+w'^2)^{3/2}$$

i po podstawieniu do poprzedniej zależności mamy równanie

$$\frac{w''}{(1+w'^2)^{3/2}} = \frac{M_g(x)}{EJ_y}, \quad (a)$$

wiążące w formie różniczkowej poszukiwaną funkcję $w(x)$ z obciążeniem wyrażonym przez $M_g(x)$ i sztywnością belki EJ_y . Ta ostatnia może być stała lub zmienna.

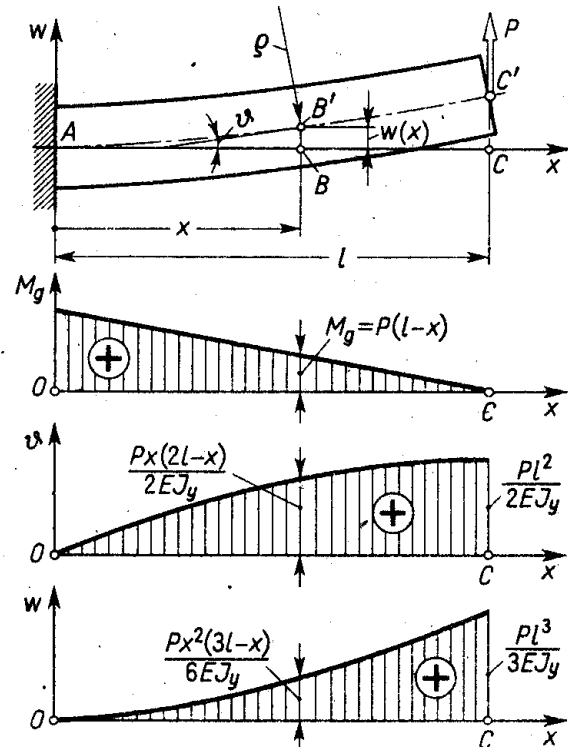
W ogromnej większości zagadnień technicznych rzędne $w(x)$, tzw. *ugięcia*, są bardzo małe w porównaniu z długością belki, wobec czego małe są też kąty ugięcia ϑ . Dla takiego przypadku, tzw. *małych ugięć*, można w równaniu (a) pominąć człon w'^2 w stosunku do jedności. Dzięki temu równanie to przybiera uproszczoną postać

$$w'' = \frac{M_g(x)}{EJ_y}. \quad (5.20)$$

Zgodnie przy tym z umową, wprowadzoną w art. 5.2, moment $M_g(x)$ uważamy za dodatni, gdy wywołuje on naprężenia ściskające w górnej części belki (rys. 5.5). Z taką samą dokładnością jak powyżej napiszemy, że kąt ugięcia (mierzony w radianach)

$$\vartheta \approx \operatorname{tg} \vartheta = w'. \quad (5.21)$$

Samo wyznaczenie $w(x)$ sprowadza się do dwukrotnego scałkowania stronami równania (5.20), będącego najprostszym równaniem różniczkowym drugiego rzędu. Z matematyki wiadomo, że w wyniku całkowania otrzymujemy funkcję $w(x)$ obciążoną dowolną funkcją liniową $Cx+D$, gdzie stałe całkowania C i D muszą być określone z warunków brzegowych (podporowych). Należy tu rozróżnić dwa warianty. W pierwszym z nich, gdy $w''(x)$



Rys. 5.48. Określenie ugięć belki

określone jest na całej belce jedną tylko funkcją x , stałe C i D wyznaczamy z warunków unieruchomienia belki jako całości. I tak dla przypadku (rys. 5.48), gdy $EJ_y = \text{const}$, mamy w utwierdzonym przekroju A ($x = 0$)

$$(w)_{x=0} = 0 \quad \text{oraz} \quad (w')_{x=0} = 0, \quad (5.22)$$

gdyż przekrój ten nie ulega ani przesunięciu, ani obrotowi. Jeśli bowiem pominąć odkształcenia od naprężeń stycznych (rys. 5.37), to przekroje poprzeczne zostają prostopadłe do odkształconej osi.

Podobnie dla belki dwupodporowej (rys. 5.7) mamy dwa warunki

$$(w)_{x=0} = 0 \quad \text{oraz} \quad (w)_{x=l} = 0, \quad (5.23)$$

wystarczające do określenia dwóch stałych C i D .

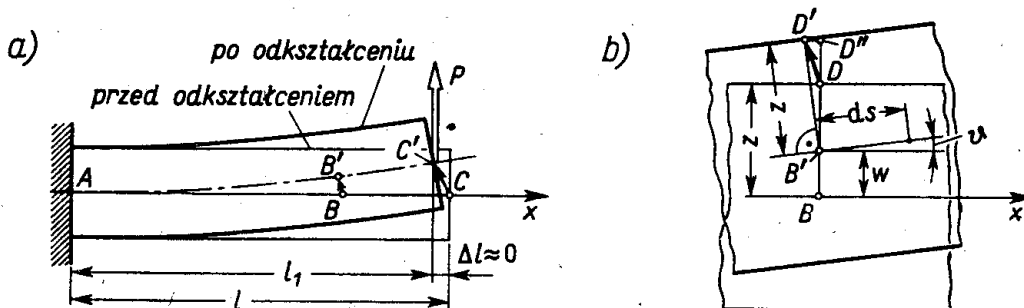
W wariancie drugim, jak na rys. 5.10, gdy $w''(x)$ określone jest w kolejnych odcinkach AD, DE, \dots belki różnymi funkcjami $w_1''(x), w_2''(x), \dots$, całkowanie równania (5.20) daje odpowiednio różne wyrażenia

$$w_1'(x) + C_1, w_2'(x) + C_2, \dots, w_1(x) + C_1 x + D_1, w_2(x) + C_2 x + D_2, \dots \quad (b)$$

z różnymi stałymi całkowania $C_1, D_1, C_2, D_2, \dots$. Do wyznaczenia tych stałych mamy, jak poprzednio, dwa warunki typu (5.23), a ponadto w miejscach styku D, E, \dots kolejnych odcinków, tzw. *warunki ciągłości*. Te ostatnie wyrażają fakt, że w miejscu styku odpowiednie gałęzie linii ugięcia mają wspólną rzędną i wspólną styczną, gdyż w'' ma wszędzie wartość skończoną i pochodna w' nie może mieć przeskoków. Tak na przykład w przekroju D , tj. $x = a_1$, mamy

$$w_1'(a_1) + C_1 = w_2'(a_1) + C_2, \quad w_1(a_1) + C_1 a_1 + D_1 = w_2(a_1) + C_2 a_1 + D_2, \quad (c)$$

i podobnie w pozostałych przekrojach E i F . Łatwo sprawdzić, że liczba warunków ciągłości łącznie z warunkami typu (5.23) lub (5.22) jest równa liczbie szukanych stałych całkowania.



Rys. 5.49. Uproszczony obraz przemieszczeń punktów belki

Ponieważ rzędne $w(x)$ są z założenia małe, zatem z dokładnością do małych wyższego rzędu można przyjąć, że całkowite przemieszczenia BB', CC', \dots punktów B, C osi są *prostopadłe*⁽¹⁾ do pierwotnej osi ABC (rys. 5.49a). Takie same przemieszczenia jak punkty

⁽¹⁾ Długość s odkształconej osi $AB'C'$, jako leżącej w warstwie obojętnej, jest równa długości pierwotnej l . Rzut linii $AB'C'$ na oś x jest nieco krótszy niż l i wynosi $l_1 = \int ds \cos \vartheta$, a przesunięcie $\Delta l = l - l_1$. Zauważmy (rys. 5.49b), że $ds \cos \vartheta \approx ds [1 - (\vartheta^2/2)] \approx ds [1 - (w'^2/2)]$. Z taką samą więc dokładnością, jak przy formułowaniu (5.20), można napisać $ds \cos \vartheta \approx ds$, a wtedy $\int ds \cos \vartheta \approx \int ds = l$ i $\Delta l = 0$. To samo można udowodnić dla dowolnego punktu B osi belki.

osi mają punkty warstwy obojętnej, która przy zgięciu belki w płaszczyźnie rysunku jest do tej płaszczyzny prostopadła. Inne są natomiast przemieszczenia punktów leżących poza warstwą obojętną jak punkt D (rys. 5.49b). Pomijając wpływ naprężeń stycznych, czyli zakładając, że przekroje zostają do osi belki prostopadłe, widzimy, że przemieszczenie DD' punktu D ma składową pionową DD'' i poziomą $D''D'$

$$DD'' = w + z \cos \vartheta - z \approx w, \quad D''D' = -z \sin \vartheta \approx -z\vartheta \approx -zw'. \quad (5.24)$$

Powyższe rozumowanie dowodzi, że znajomość linii ugięcia wystarcza przy pewnych uzasadnionych uproszczeniach do określenia przemieszczeń wszystkich punktów belki. Z tego powodu przy badaniu przemieszczeń w belkach koncentrujemy się na określeniu samej tylko linii ugięcia.

Zadania

1. Wyznaczyć linię ugięcia pryzmatycznej belki (rys. 5.48) o przekroju kołowym. Określić ekstremalny kąt ugięcia ϑ_e i ekstremalne ugięcie $|w_e| = f$, tzw. *strzałkę ugięcia*. Przyjąć, że $P = 10 \text{ kN}$, $l = 1 \text{ m}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, a dopuszczalne naprężenie $k_r = k_c = 100 \text{ MPa}$.

Rozwiązanie. Moment gnący określony jest jedną tylko funkcją

$$M_g = P(l-x) \quad (0 < x < l)$$

i ma wartość dodatnią. Wstawiając to wyrażenie do (5.20) i całkując stronami (przy $EJ_y = \text{const}$) mamy w wyniku

$$w' = \int w'' dx + C = \int [P(l-x)/EJ_y] dx + C = (P/EJ_y) [lx - (x^2/2)] + C.$$

Całkując podobnie powyższe wyrażenie otrzymujemy

$$w = \int w' dx + D = (P/EJ_y) [(lx^2/2) - (x^3/6)] + Cx + D.$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków (5.22), stąd

$$C = 0, \quad D = 0,$$

i w rezultacie mamy poszukiwany kąt ϑ oraz ugięcie w

$$\vartheta \approx w' = \frac{Px(2l-x)}{2EJ_y}, \quad w = \frac{Px^2(3l-x)}{6EJ_y}. \quad (d)$$

Ich przebieg (w dużej skali) podaje rysunek. Widać, że ϑ i w są na całej długości belki dodatnie, co zgadza się z intuicją. Ekstremalny kąt ϑ_e i ekstremalne ugięcie $|w_e| = f$ występują na swobodnym końcu belki ($x = l$) i są

$$\vartheta_e = \frac{Pl^2}{2EJ_y}, \quad f = |w_e| = \frac{Pl^3}{3EJ_y}. \quad (5.25)$$

Przy podanych wartościach liczbowych mamy $(M_g)_{\text{ekst}} = 10 \text{ kN m}$. Z warunku (5.19) i $W_y = \pi d^3/32$ otrzymujemy średnicę $d = 10 \text{ cm}$, skąd $EJ_y = \pi Ed^4/64 = 0,98 \cdot 10^6 \text{ N m}^2$, a z wzorów (5.25)

$$\vartheta_e = \frac{10^4 \cdot 1^2}{2 \cdot 0,98 \cdot 10^6} \approx 0,51 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \approx 0,29^\circ, \quad f = \frac{10^4 \cdot 1^3}{3 \cdot 0,98 \cdot 10^6} \approx 0,34 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 0,34 \text{ cm}.$$

Jak widać, (f/l) jest tu rzędu $1/300$. W praktyce wartości (f/l) w zależności od przeznaczenia są rzędu $10^{-2} \div 10^{-5}$ (te ostatnie w urządzeniach pomiarowych).

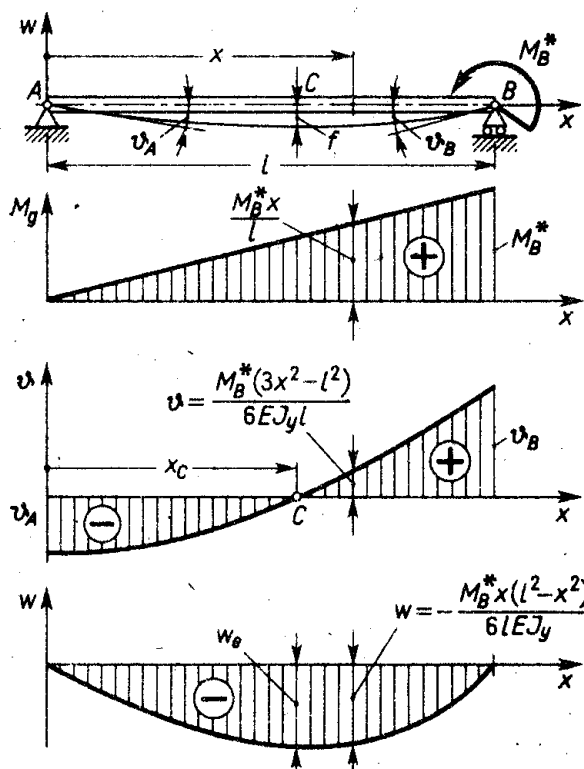
2. Wyznaczyć linię ugięcia pryzmatycznej belki (rys. 5.50) i wielkość kątów ϑ_A i ϑ_B na podporach oraz strzałkę ugięcia f .

Odp. Mamy tu znowu pierwszy wariant całkowania (5.20), gdyż

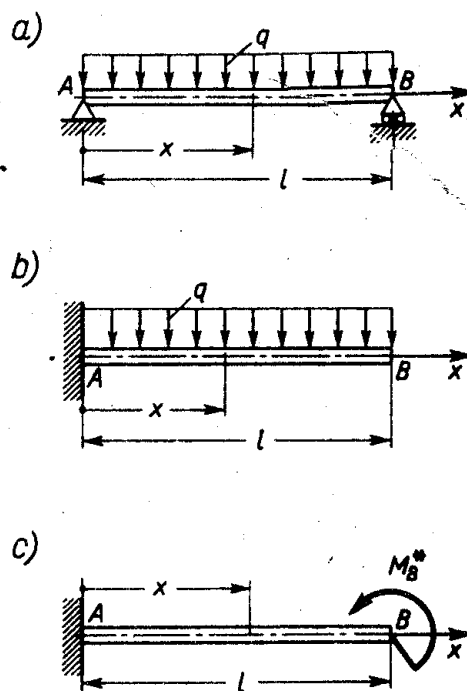
$$M_g(x) = M_B^* x/l$$

jest określony tylko jedną funkcją, a $EJ_y = \text{const}$. Po kolejnym scałkowaniu (5.20) jak poprzednio mamy

$$w' = (M_B^* x^2/2lEJ_y) + C, \quad w = (M_B^* x^3/6lEJ_y) + Cx + D.$$



Rys. 5.50.



Rys. 5.51.

Warunki podporowe są tym razem typu (5.23), skąd obliczamy $D = 0$ i $C = -M_B^* l/6EJ_y$. W rezultacie mamy

$$\vartheta = w' = -\frac{M_B^* l}{6EJ_y} + \frac{M_B^* x^2}{2lEJ_y}, \quad w = -\frac{M_B^* x}{6lEJ_y} (l^2 - x^2). \quad (e)$$

Wykresy ϑ i w podaje (w dużej skali) rysunek. Kąty ugięcia na podporach są

$$\vartheta_A = (\vartheta)_{x=0} = -\frac{M_B^* l}{6EJ_y}, \quad \vartheta_B = (\vartheta)_{x=l} = \frac{M_B^* l}{3EJ_y}, \quad (5.26)$$

przy czym $\vartheta_A < 0$ zgadza się z tym, że w obranym układzie współrzędnych mamy $(w')_{x=0} < 0$. W tymże układzie rzędne w są też ujemne. Ekstremalna wartość $|w_e|$ odpowiada przekroju C , w którym $\vartheta = w' = 0$, czyli $x_c = l/\sqrt{3}$ i jest

$$f = |w_e| = M_B^* l^2/9 \sqrt{3} EJ_y \approx M_B^* l^2/15,7 EJ_y. \quad (5.27)$$

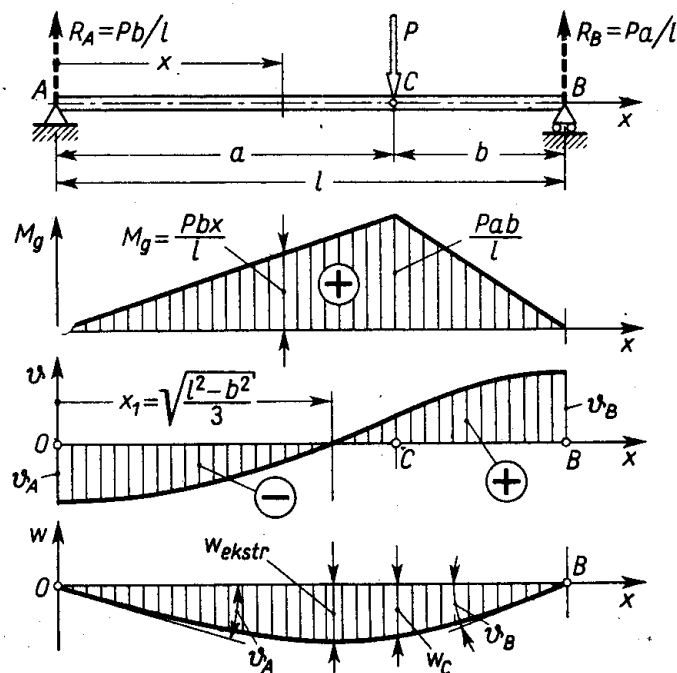
3. Dla podanych pryzmatycznych belek (rys. 5.51) wyznaczyć linię ugięcia $w(x)$, strzałkę i ekstremalny kąt ugięcia.

Odp. Przykłady odpowiadają pierwszemu wariantowi całkowania.

$$a) w = -\frac{qx(l^3 - 2lx^2 + x^3)}{24EJ_y}, \quad f = |w|_{x=l/2} = \frac{5ql^4}{384EJ_y}, \quad -\vartheta_A = \vartheta_B = \frac{ql^3}{24EJ};$$

$$b) w = -\frac{qx^2(6l^2 - 4lx + x^2)}{24EJ_y}, \quad f = |w|_{x=l} = \frac{ql^4}{8EJ_y}, \quad \vartheta_e = (\vartheta)_{x=l} = -\frac{ql^3}{6EJ};$$

$$c) w = \frac{M_B^* x^2}{2EJ_y}, \quad f = (w)_{x=l} = \frac{M_B^* l^2}{2EJ_y}, \quad \vartheta_e = (\vartheta)_{x=l} = \frac{M_B^* l}{EJ_y}.$$



Rys. 5.52. Analiza ugięcia dwupodporowej belki wywołanego siłą skupioną

4. Wyznaczyć linię ugięcia przyrządczej dwupodporowej belki (rys. 5.52) obciążonej siłą skupioną. Przedyskutować wyniki.

Rozwiązanie. Mamy tu drugi wariant całkowania linii ugięcia, gdyż moment gnący określają dwie różne funkcje:

$$\begin{aligned} \text{w przedziale I } (0 \leq x \leq a) & \quad M_{gI} = Pbx/l, \\ \text{w przedziale II } (a \leq x \leq l) & \quad M_{gII} = (Pbx/l) - P(x-a). \end{aligned}$$

Oznaczając odpowiednio w_I i w_{II} ugięcia w tych przedziałach mamy z równania (5.20)

$$EJ_y w_I'' = Pbx/l, \quad EJ_y w_{II}'' = (Pbx/l) - Px + Pa,$$

a po kolejnych całkowaniach przy $EJ_y = \text{const}$

$$\begin{aligned} EJ_y w_I' &= (Pbx^2/2l) + C_1, & EJ_y w_{II}' &= (Pbx^2/2l) - (Px^2/2) + Pax + C_2, \\ EJ_y w_I &= (Pbx^3/6l) + C_1 x + D_1, & EJ_y w_{II} &= (Pbx^3/6l) - (Px^3/6) + (Pax^2/2) + C_2 x + D_2. \end{aligned}$$

Wykorzystując warunki ciągłości w przekroju C ($x = a$), tzn.

$$(w_I')_{x=a} = (w_{II}')_{x=a}, \quad (w_I)_{x=a} = (w_{II})_{x=a},$$

oraz warunki podporowe $(w_I)_{x=0} = 0$ i $(w_{II})_{x=l} = 0$ mamy w wyniku cztery równania

$$C_1 - C_2 = Pa^2/2, \quad (C_1 - C_2)a + D_1 - D_2 = Pa^3/3, \quad D_1 = 0, \quad C_2 l + D_2 = -Pal^2/3.$$

Rozwiązanie tych równań daje poszukiwane wartości stałych

$$C_1 = -Pab(l+b)/6l, \quad C_2 = -Pa(2l^2+a^2)/6l, \quad D_1 = 0, \quad D_2 = Pa^3/6,$$

dzięki czemu można wykreślić przebieg kąta $\vartheta(x)$ i ugięcia $w(x)$, jak to podaje rysunek (w dużej skali). Kąty ugięcia ϑ_A i ϑ_B na podporach otrzymujemy wstawiając $x=0$ do wzoru na $\vartheta_I = w'_I$ oraz $x=l$ do wzoru na $\vartheta_{II} = w'_{II}$. W wyniku mamy

$$\vartheta_A = -Pab(l+b)/6lEJ_y, \quad \vartheta_B = Pab(l+a)/6lEJ_y, \quad (5.28)$$

przy czym ϑ_A jest ujemne, gdyż w obranym układzie współrzędnych $(w'_I)_{x=0} < 0$. Ujemne są też rzędne $w(x)$, jak w przekroju C

$$w_C = (w_I)_{x=a} = (w_{II})_{x=a} = -Pa^2b^2/3EJ_y l. \quad (5.29)$$

Dla pełności obrazu obliczmy też strzałkę ugięcia $f = |w_e|$. Gdy $a > l/2$, wówczas w_e występuje w przedziale I , tam gdzie $w'_I = 0$. Odpowiadająca temu odcięta $x_1 = \sqrt{(l^2-b^2)/3}$, a wartość $|w_e|$

$$f = |w_e| = Pb(l^2-b^2)^{3/2}/9EJ_y l\sqrt{3}. \quad (f)$$

Łatwo się przekonać, że odcięta x_1 niewiele różni się od $l/2$. Nawet gdy $b \rightarrow 0$, wówczas $x_1 \rightarrow l/\sqrt{3}$ i $x_1 - (l/2) \approx 0,08l$. To powoduje, że różnica $w_e - (w)_{x=l/2}$ jest też niewielka i nawet w granicznym przypadku⁽¹⁾, gdy $b \rightarrow 0$, wówczas $|w_e - (w)_{x=l/2}| < 2,5\% |w_e|$.

Spostrzeżenie to wykorzystujemy i w innych przypadkach belek dwupodporowych. Jeśli mianowicie $M_g(x)$ nie zmienia znaku na całej długości belki, to z techniczną dokładnością

$$w_e \approx w_{x=l/2}. \quad (g)$$

W przypadku szczególnym, gdy $a = b = l/2$, mamy

$$-\vartheta_A = \vartheta_B = Pl^2/16EJ_y, \quad f = |w_e| = Pl^3/48EJ_y. \quad (5.30)$$

5. Po belce (rys. 5.52) przesuwają się ciężary P . Jakiemu położeniu P odpowiada: a) ekstremalna strzałka, b) ekstremalny kąt ϑ ?

Odp. a) obliczając z wzoru (f) df/db , z warunku $df/db = 0$ mamy $b = l/2$ i $f_{\max} = Pl^3/48EJ_y$; b) z rys. 5.52 widać, że ekstremalne ϑ jest na podporze B . Z warunku $d\vartheta_B/db = 0$, przy czym $a = l - b$, mamy $b = l - (l/\sqrt{3})$ i ostatecznie $(\vartheta_B)_{\max} = Pl^2/9\sqrt{3}EJ_y$.

6. Dobrac średnicę d stalowego wałka, którego schemat statyczny odpowiada rys. 5.52, aby ugięcie w przekroju C nie przekraczało 0,5 mm i aby naprężenia były mniejsze od $k_r = 100$ MPa. Dane liczbowe: $P = 10$ kN, $l = 1$ m, $a = 0,6$ m, $E = 2,0 \cdot 10^5$ MPa.

Odp. Mamy tu niezależne warunki $|w_C| \leq 0,5$ mm i $|\sigma_e| \leq k_r$. Z pierwszego przy wykorzystaniu (5.29) mamy $J_y = 192$ cm⁴, skąd $d' \approx 7,9$ cm, z drugiego $W_y = 24$ cm³, skąd $d'' \approx 6,2$ cm. Widać, że postulat sztywności jest tu ostrzejszy i $d = d' = 7,9$ cm.

7. Podporami wałka z zadania 6 są w rzeczywistości łożyska kulkowe jednorzędowe (rys. 5.3a), których luz kątowy $\vartheta_0 = 0,1^\circ$. Czy takie rozwiązanie jest prawidłowe?

Odp. Tak, bo obliczone z wzorów (5.28) przy $J_y = 192$ cm⁴ kąty $\vartheta_A = 1,46 \cdot 10^{-3}$ rad oraz $\vartheta_B = 1,66 \cdot 10^{-3}$ rad są mniejsze niż $\vartheta_0 = 1,75 \cdot 10^{-3}$ rad.

8. W belce (rys. 5.52) nie zmieniając przekroju zwiększono dwukrotnie wymiary a , b i jednocześnie zmniejszono dwukrotnie siłę P . Jak zmieniają się naprężenia σ , ugięcia i kąty ugięcia w odpowiadających sobie punktach belki pierwotnej i wydłużonej?

Odp. Naprężenia σ te same, ugięcia wzrosną 4 razy, kąty – 2 razy.

9. Wykorzystując wyniki zadania 4 obliczyć ugięcie przekroju C i kąty ugięcia na podporach belki (rys. 5.53).

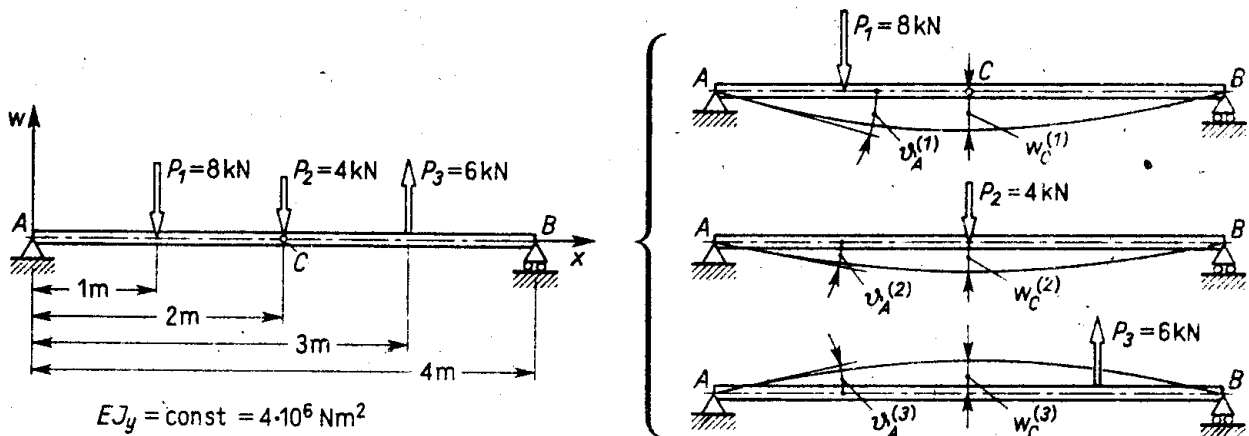
⁽¹⁾ Gdy $b \rightarrow 0$, wówczas $(w)_{x=l/2} = -Pl^2b/16EJ_y$, $w_e \rightarrow -Pl^2b/9\sqrt{3}EJ_y$.

Odp. Stosując zasadę superpozycji ⁽¹⁾ rozkładamy zadanie na trzy będące kopią zadania 4. Z wzorów (5.28) obliczamy kolejno

$$\vartheta_A^{(1)} = -1,75 \cdot 10^{-3} \text{ rad}, \quad \vartheta_A^{(2)} = -1,00 \cdot 10^{-3} \text{ rad}, \quad \vartheta_A^{(3)} = 0,94 \cdot 10^{-3} \text{ rad},$$

a całkowity kąt $\vartheta_A = \vartheta_A^{(1)} + \vartheta_A^{(2)} + \vartheta_A^{(3)} = -1,81 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx -0,104^\circ$. Podobnie wyznaczamy $\vartheta_B = 0,94 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,054^\circ$. Przy obliczeniu $w_C^{(1)}$ stosujemy wzór dla $(w_{II})_{x=l/2}$, gdyż przekrój C leży na prawo od siły P_1 . Po przekształceniach otrzymujemy

$$w_C^{(1)} = -P_1 a_1 (3l^2 - 4a_1^2) / 48EJ, = -1,83 \cdot 10^{-3} \text{ m} = -1,83 \text{ mm},$$



Rys. 5.53. Przykład zastosowania zasady superpozycji

gdzie $a_1 = 1 \text{ m}$ — odcięta odpowiadająca sile P_1 . Przy obliczeniu $w_C^{(2)}$ wykorzystujemy wzór (5.30), a przy określeniu $w_C^{(3)}$ bierzemy

$$w_C^{(3)} = (w_I)_{x=l/2} = -P_3 b_3 (3l^2 - 4b_3^2) / 48EJ, = 1,37 \text{ mm},$$

gdź $x_C = l/2$, $a_3 = 3 \text{ m}$ oraz $P_3 = -6 \text{ kN}$. W wyniku

$$w_C = w_C^{(1)} + w_C^{(2)} + w_C^{(3)} = -1,83 - 1,33 + 1,37 = -1,79 \text{ mm},$$

a więc wypadkowe ugięcie w_C jest do dołu.

10. Wykorzystując wyniki poprzednich zadań wyznaczyć kąty ugięcia ϑ_A i ϑ_C oraz ugięcie w_C belki (rys. 5.54).

Rozwiązanie. Po wprowadzeniu dwóch przeciwnych momentów $M_B^* = ql^2/2$ sprowadzamy zadanie do superpozycji trzech prostszych. W pierwszym z nich część AB zostaje nieodkształcona, bo $M_B^{(1)} \equiv 0$, sytuacja zaś części BC jest identyczna jak belki (rys. 5.51b), wobec czego z zadania 3 mamy

$$\vartheta_A^{(1)} = 0, \quad \vartheta_C^{(1)} = ql^3/6EJ_y, \quad w_C^{(1)} = ql^4/8EJ_y.$$

Podobnie w drugim przypadku, tj. działania $M_B^* = ql^2/2$, wykorzystujemy wyniki zadania 2. Zważywszy, że część BC, w której $M_B^{(2)} \equiv 0$, obraca się jako sztywna całość o kąt ϑ_B , mamy

$$\vartheta_A^{(2)} = ql^2 l_1 / 12EJ_y, \quad \vartheta_C^{(2)} = \vartheta_B = ql^2 l_1 / 6EJ_y, \quad w_C^{(2)} = \vartheta_B l = ql^3 l_1 / 6EJ_y.$$

Na koniec w trzecim przypadku, identycznym z podanym na rys. 5.51a, otrzymujemy

$$\vartheta_A^{(3)} = ql_1^3 / 24EJ_y, \quad \vartheta_C^{(3)} = \vartheta_B = ql_1^3 / 24EJ_y, \quad w_C = \vartheta_B l = ql_1^3 l / 24EJ_y,$$

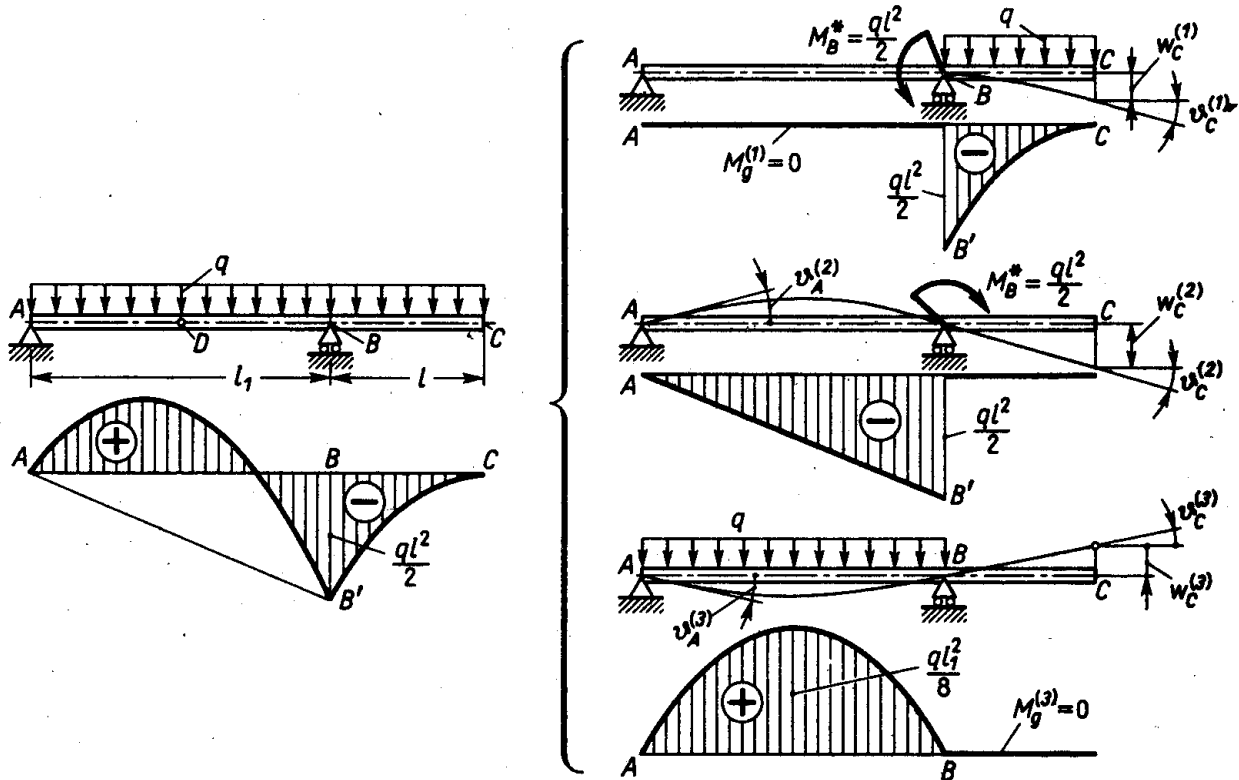
⁽¹⁾ Równanie (5.20) jest liniowe i ma postać $w'' = f(x)$, gdzie $f(x) = M_o(x)/EJ_y$. Jeśli na belkę działają kolejno obciążenia $f_1(x)$ i $f_2(x)$, którym odpowiadają ugięcia w_1 i w_2 , to ich łączne działanie $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ daje ugięcie $w = w_1 + w_2$, a to jest właśnie zasada superpozycji.

a ostateczny wynik po uwzględnieniu zwrotów jak na rysunkach

$$\vartheta_A = \vartheta_A^{(1)} + \vartheta_A^{(2)} - \vartheta_A^{(3)} = (ql^2 l_1 / 12EJ_y) - (ql_1^3 / 24EJ_y),$$

$$\vartheta_C = (ql_1^3 / 24EJ_y) (4\xi^3 + 4\xi^2 - 1), \quad w_C = (ql_1^4 / 24EJ_y) (3\xi^4 + 4\xi^3 - \xi),$$

gdzie $\xi = l/l_1$. Jak widać, w takich zadaniach celowe jest posługiwanie się szkicami odkształceń belki odpowiadających poszczególnym obciążeniom składowym.



Rys. 5.54. Przykład wykorzystania zasady superpozycji

11. W belce (rys. 5.20a) $c_1 = c_2$ oraz $EJ_y = \text{const}$. Przy jakiej wartości stosunku $c_1/l_1 = \xi$ kąty ugięcia ϑ_C i ϑ_D są równe zero?

Odp. Kąt $|\vartheta_C| = |\vartheta_D| = (ql_1^3 / 24EJ_y) (4\xi^3 + 6\xi^2 - 1)$ i z warunku $\vartheta_C = 0$ otrzymujemy $\xi = c_1/l_1 \approx 0,366$. Wynik ma praktyczne znaczenie w konstrukcji ław przyrządów pomiarowych.